

# KEBEBASAN LINEAR GONDRAN-MINOUX DAN REGULARITAS DALAM ALJABAR MAKS-PLUS



oleh

ANNISA RAHMAWATI

M0112010

SKRIPSI

ditulis dan diajukan untuk memenuhi sebagian persyaratan  
memperoleh gelar Sarjana Sains Matematika

**FAKULTAS MATEMATIKA DAN ILMU PENGETAHUAN ALAM  
UNIVERSITAS SEBELAS MARET  
SURAKARTA**

**2017**

KEBEBASAN LINEAR GONDRAN-MINOUX DAN REGULARITAS  
DALAM ALJABAR MAKS-PLUS

SKRIPSI

ANNISA RAHMAWATI

NIM. M0112010

dibimbing oleh

Pembimbing I

Drs. Siswanto, M.Si.

NIP. 19670813 199203 1 002



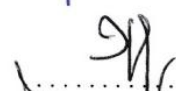
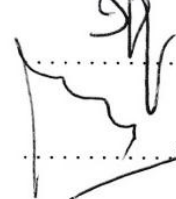
Pembimbing II

Drs. Muslich, M.Si.

NIP. 19521118 197903 1 001

telah dipertahankan di hadapan Dewan Penguji  
dan dinyatakan memenuhi syarat  
pada hari Jumat, tanggal 6 Januari 2017

Dewan Penguji

Jabatan	Nama dan NIP	Tanda Tangan	Tanggal
Ketua	Nughthoh Arfawi Kurdhi, M.Sc. NIP. 19850717 201012 1 003		19-1-2017
Sekretaris	Dra. Mania Roswitha, M.Si. NIP. 19520628 198303 2 001		19-1-2017
Anggota Penguji	Drs. Siswanto, M.Si. NIP. 19670813 199203 1 002		18-1-2017
	Drs. Muslich, M.Si. NIP. 19521118 197903 1 001		17-1-2017

Disahkan  
di Surakarta pada tanggal 20 JAN 2017

Kepala Program Studi Matematika  
Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam  
Universitas Sebelas Maret Surakarta



Supriyadi Wibowo, M.Si.

NIP. 19681110 199512 1 001

# ABSTRAK

Annisa Rahmawati, 2017. KEBEBASAN LINEAR GONDRAN-MINOUX DAN REGULARITAS, DALAM ALJABAR MAKS-PLUS. Fakultas Matematika dan Ilmu Pengetahuan Alam, Universitas Sebelas Maret.

Aljabar maks-plus merupakan suatu himpunan  $R_{max} = R \cup \{-\infty\}$  yang dilengkapi operasi maksimum  $\oplus$  dan penjumlahan  $\otimes$ . Himpunan matriks berukuran  $n \times n$  atas aljabar maks-plus dinotasikan sebagai  $R_{max}^{n \times n}$ . Penelitian ini bertujuan untuk membahas mengenai kebebasan linear Gondran-Minoux dan regularitas serta menyelidiki hubungan antara matriks reguler kuat dengan matriks Gondran-Minoux reguler. Matriks  $A \in R_{max}^{n \times n}$  dikatakan reguler kuat jika dan hanya jika  $A$  permanen kuat. Untuk menentukan nilai permanen pada matriks, perlu dicari permutasi matriks yang memiliki bobot maksimum. Selanjutnya, suatu matriks dikatakan memiliki permanen kuat apabila hanya terdapat satu permutasi yang memiliki bobot maksimum. Matriks  $A \in R_{max}^{n \times n}$  dikatakan Gondran minoux reguler jika  $ap(A) \subseteq P_n^+$  atau  $ap(A) \subseteq P_n^-$ . Berdasarkan hasil dan pembahasan dapat disimpulkan bahwa setiap matriks yang reguler kuat adalah Gondran-Minoux reguler dan himpunan vektor  $S$  dikatakan bebas linear Gondran-Minoux jika  $S$  tidak dapat dipartisi menjadi dua subhimpunan saling asing yang membentuk ruang linear.

**Kata Kunci:** Aljabar maks-plus, matriks, permutasi, kebebasan linear Gondran-Minoux, reguler kuat, Gondran-Minoux reguler.

# ABSTRACT

Annisa Rahmawati, 2017. GONDRAN-MINOUX LINEARLY INDEPENDENT AND REGULARITY IN MAX-PLUS ALGEBRA. Faculty of Mathematics and Natural Sciences, Sebelas Maret University.

Max-plus algebra is a set  $R_{max} = R \cup \{-\infty\}$  equipped with maximum ( $\oplus$ ) and sum ( $\otimes$ ) operations. The set of matrices  $n \times n$  over max-plus algebra denoted by  $R_{max}^{n \times n}$ . The aim of this research is to study Gondran-Minoux linearly independent and regularity and then to investigate a relation between strongly regular and Gondran-Minoux regular matrix. Let  $A \in R_{max}^{n \times n}$ , matrix  $A$  be called strongly regular if and only if strong permanent. To determine a value of the permanent matrix, we must obtain the permutation matrix which has a maximum weight. Furthermore, a matrix has strong permanent if the matrix has only one permutation which has a maximum weight. Matrix  $A \in R_{max}^{n \times n}$  is said to be Gondran-Minoux regular if  $ap(A) \subseteq P_n^+$  or  $ap(A) \subseteq P_n^-$ . Based on the result and discussion can be concluded that every strongly regular matrix is Gondran-Minoux regular and the set of vectors is called Gondran-Minoux linearly independent if it can not be partitioned into two disjoint subsets that make up the linear space.

**Keywords :** *Max-plus algebra, matrix, permutation, Gondran-Minoux linearly independent, strong regular, Gondran-Minoux regular.*

## **PERSEMBAHAN**

Karya ini saya persembahkan untuk  
semua orang yang saya sayangi.

## MOTO

*Hal terindah bukanlah saat saya memiliki semuanya, tetapi saat  
saya puas dengan apa yang saya dapat dengan usaha dan kerja  
keras*

# KATA PENGANTAR

Puji Syukur penulis panjatkan kepada Allah SWT, karena berkat ridho-Nya penulis dapat menyelesaikan skripsi ini. Pada kesempatan ini penulis mengucapkan terimakasih kepada

1. Drs. Siswanto, M.Si. dan Drs. Muslich, M.Si. sebagai Pembimbing I dan II yang telah memberikan bimbingan serta arahan sehingga penulis dapat menyelesaikan skripsi ini dan
2. yang telah memberikan motivasi dalam penulisan skripsi ini.

Penulis berharap semoga skripsi ini dapat bermanfaat bagi semua pembaca.

Surakarta, 2016

Penulis

# DAFTAR ISI

PENGESAHAN . . . . .	ii
ABSTRAK . . . . .	iii
<i>ABSTRACT</i> . . . . .	iv
PERSEMBAHAN . . . . .	v
MOTO . . . . .	vi
KATA PENGANTAR . . . . .	vii
DAFTAR ISI . . . . .	ix
DAFTAR GAMBAR . . . . .	x
DAFTAR NOTASI . . . . .	xi
 <b>I PENDAHULUAN</b>	 <b>1</b>
1.1 Latar Belakang Masalah . . . . .	1
1.2 Perumusan Masalah . . . . .	2
1.3 Tujuan . . . . .	2
1.4 Manfaat . . . . .	3
 <b>II LANDASAN TEORI</b>	 <b>4</b>
2.1 Tinjauan Pustaka . . . . .	4
2.2 Landasan Teori . . . . .	5
2.2.1 Aljabar Maks-Plus . . . . .	5
2.2.2 Graf Berarah dan Matriks dalam Aljabar Maks-Plus . . . .	7
2.2.3 Permutasi . . . . .	8
2.2.4 Permanen . . . . .	10
2.3 Kerangka Pemikiran . . . . .	10



<b>III METODE PENELITIAN</b>	<b>12</b>
<b>IV PEMBAHASAN</b>	<b>14</b>
4.1 Kebebasan Linear pada Aljabar Maks-Plus . . . . .	14
4.2 Kebebasan Linear Gondran-Minoux . . . . .	15
<b>V PENUTUP</b>	<b>22</b>
5.1 Kesimpulan . . . . .	22
5.2 Saran . . . . .	22
<b>DAFTAR PUSTAKA</b>	<b>23</b>

## DAFTAR GAMBAR

2.1	Digraf $D$ . . . . .	7
4.1	$Z_{H'}$ . . . . .	18
4.2	$Z_{B'}$ . . . . .	20
4.3	$Z_{C'}$ . . . . .	21

## DAFTAR NOTASI

$R$	: himpunan bilangan real
$\varepsilon$	: $-\infty$
$R_{maks}$	: $R \cup \{-\infty\}$
$\oplus$	: maksimum
$\otimes$	: penjumlahan
$\varepsilon$	: $-\infty$
$e$	: 0
$R_{maks}^{m \times n}$	: himpunan matriks aljabar maks-plus berukuran $m \times n$
$N$	: himpunan bilangan asli
$\pi$	: permutasi
$P_n$	: himpunan permutasi $\pi$
$w(\pi, A)$	: bobot permutasi $\pi$ dalam digraf berbobot $A$
$D$	: digraf $D$
$V$	: himpunan <i>vertex</i>
$E$	: himpunan <i>edge</i>
$Z_A$	: digraf nol yang berhubungan dengan matriks $A$
$\cup$	: operasi <i>union</i>
$\subset$	: himpunan bagian
$\in$	: anggota
$maper(A)$	: permanen maks-aljabar dari $A$
$ap(A)$	: himpunan permutasi maksimum dari $A$
$\sigma$	: <i>cycle</i>
$\sim$	: ekuivalen
$(a_{ij})$	: entri matriks $A$